2025 届高三年级开学联考

数学试题

本试卷共 4 页，19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\left\{x \middle| x=\cos\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$A=\{-1,0\}$，则 $\complement_U A=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{-1\}$

2. 一次演讲比赛，10 位评委给某位选手打出了 10 个原始分，去掉一个最高分和一个最低分后得到 8 个有效分，则这 8 个有效分与 10 个原始分相比，下列一定成立的是

A. 平均分变小　　B. 极差变小

C. 中位数不变　　D. 方差变小

3. 若 $z=1+\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})^2$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{10}$　　B. 10　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

5. 某高中对高三年级的 1 000 名学生进行了一次数学成绩测试，得到各同学的数学成绩（满分 150 分）X 近似服从正态分布 $N(120,100)$，则得分在区间 $[130,140]$ 内的学生大约有（参考数据：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.7$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.96$）

A. 324 人　　B. 90 人　　C. 130 人　　D. 45 人

6. 椭圆 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 为椭圆 E 上一动点，延长 F_1P 到点 Q，使得 P 为线段 F_1Q 的中点，则 $|QF_2|$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 4

7. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{2-x^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\sqrt{2}\right)$，则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

8. 若函数 $f(x)=\ln|x|-a(|x|-1)$ 有 4 个零点，则 a 的取值范围为

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\tan 2x$，函数 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，则

A. $y=f(x)$与 $y=g(x)$有相同的对称中心

B. $f(x)$与 $g(x)$有相同的周期

C. $y=f(x)$与 $y=g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$上有 2 个交点

D. 函数 $y=f(x)\cdot g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$的值域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

10. 已知可导函数 $y=f(x)$的导函数为 $f'(x)=x(\ln|x|+x^2-1)$，则

A. $y=f(x)$有 2 个极值点 $x=\pm 1$

B. $y=f'(x)$有 3 个零点

C. $y=f(x)$只可能在 $x=1$ 或者 $x=-1$ 时取得最小值

D. 对 $\forall x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)>0$ 恒成立

11. 已知圆 $T:(x-1)^2+y^2=1$，抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $l:ax+y-a=0$ 与 E 从上到下依次交于 A,D 两点，与 T 从上到下依次交于 B,C 两点，则

A. 若$|AF|=2|DF|$，则 l 的斜率为$\sqrt{2}$

B. $|AF|\cdot|DF|$的最小值为 4

C. $|AB|\cdot|CD|$为定值

D. $|AB|,|BC|,|CD|$可以构成等差数列

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-1$，则 $a_n=$ ________.

13. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则以 AA_1 的中点 P 为球心，$2\sqrt{2}$为半径的球与侧面 BCC_1B_1 相交，则交线（在正方形 BCC_1B_1 内部）的长度为________.

14. 甲、乙进行发球比赛，他们实力相当，每次发球命中 3 分或者命中 2 分或者未命中，三种情况的概率均为$\frac{1}{3}$. 规则如下：甲、乙轮流发球，一方发完球后交给另一方发球，此时叫做一轮发球，现在甲先发球，乙后发球，经过 2 轮发球后，甲得分比乙得分高的概率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在锐角$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a(2-\cos C)=c(2\cos B+\cos A)$，$b=\sqrt{3}$.

(1)求 C；

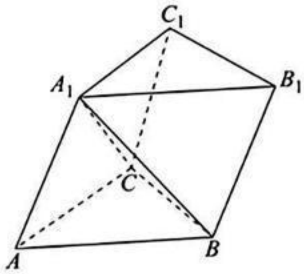
(2)记 D 为 AC 的中点，求 BD 的取值范围.

16.(本小题满分 15 分)

如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 BCC_1B_1,$A_1B_1=A_1B$,$A_1C_1=A_1C$.

(1)证明:$BC\perp AC$;

(2)若 $AA_1=2$,$AB=5$,直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成的角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$,求平面 A_1BC 与平面 B_1AC 夹角的余弦值.



17.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=(x-a)(x+1)+a\ln x$.

(1)当 $a=-2$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)记函数 $g(x)=f(x)-3x+1$,已知 $g(x)$ 只有 1 个零点,求正整数 a 的最小值.

18.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，F_1，F_2 分别为 C 的左、右焦点，A，B 分别为 C 的左、右顶点，P，Q 为 C 右支上异于顶点的两点，点 P 关于坐标原点 O 的对称点为 M，当 $|PM|=|F_1F_2|$ 时，$S_{\triangle PMF_2}=1$，直线 AP，AQ 与 y 轴分别交于 D，E，直线 BP，BQ 与 y 轴分别交于 T，S.

（1）求 C 的标准方程；

（2）求证：$\frac{|OT|}{|OS|}=\frac{|OE|}{|OD|}$；

（3）若 $|OD|\cdot|OE|$ 为定值 $\frac{1}{2}$，探究直线 PQ 是否过定点，若是，求出该定点坐标；若不是，说明理由.

19.（本小题满分 17 分）

正四面体 $A-BCD$ 某个顶点处有一粒子 Q，粒子 Q 的运动规律如下：粒子 Q 每经过一个时间单位，有 $\frac{1}{3}$ 的概率仍停留在原顶点，也有可能沿着棱从原顶点移动到另外的顶点，而且移动到另外三个顶点的任何一个都是等可能的. 已知在时刻 $t=0$ 时，粒子 Q 在顶点 A 处，若在时刻 $t=n$ 时，粒子 Q 在顶点 A 处记为事件 A_n，记此时事件 A_n 发生的概率为 $p_n(A)$.

（1）求 $p_2(A)$；

（2）求 $p_n(A)$，并判断数列 $\{p_n(A)\}$ 的单调性；

（3）记 $b_n=p_n(A)\cdot p_{n+1}(A)$，求证：$\sum_{i=1}^{n}b_i\leqslant\frac{1}{32}+\frac{n}{12}$.

2025 届高三年级开学联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】由题意可得 $U=\{-1,0,1\}$，则 $\complement_U A=\{1\}$. 故选 C.

2. C 【解析】若去掉一个最高分和一个最低分后，一定不变的只有中位数. 故选 C.

3. A 【解析】$z=1+i+(1+i)^2=1+i+1+i^2+2i=1+3i$，故 $|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. 故选 A.

4. A 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2+4-2\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$. 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$. 故选 A.

5. C 【解析】由题意，$\mu=120$，$\sigma=10$，则 $P(130\leqslant x\leqslant 140)=\frac{P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}=\frac{0.96-0.7}{2}=0.13$，$1\ 000\times0.13=130$. 故选 C.

6. B 【解析】由题意得 $|F_1F_2|=2$，记点 $T(3,0)$，则 $|F_2T|=2$，即 F_2 为线段 F_1T 的中点，P 为线段 F_1Q 的中点，则在 $\triangle QF_1T$ 中，$|QT|=2|PF_2|$，$|QF_1|=2|PF_1|$，则 $|QT|+|QF_1|=4\sqrt{2}>|F_1T|$，所以动点 Q 的轨迹为以 T，F_1 为焦点的椭圆，可得 $|QF_2|$ 的最小值为 2. 故选 B.

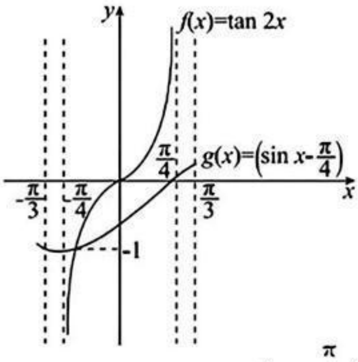
7. D 【解析】$f(x)=\frac{x^2+1}{2-x^2}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{2x^2-1}$，所以 $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=1$，设 $t=f(x)=\frac{x^2+1}{2-x^2}$，$t>1$，$t-1=f(x)-1=\frac{2x^2-1}{2-x^2}>0$，则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=t+\frac{t}{t-1}=\frac{t^2-t+t}{t-1}=\frac{(t-1)^2+2(t-1)+1}{t-1}=t-1+\frac{1}{t-1}+2\geqslant 2+2=4$，当且仅当 $t-1=1$，即 $t=2$，即 $x=1$ 时等号成立. 故选 D.

8. B 【解析】$f(x)=\ln|x|-a(|x|-1)$ 有 4 个零点，可知 $x=1$ 或 $x=-1$ 时，$f(x)=0$，所以 $a=\frac{\ln|x|}{|x|-1}$ $(x\neq\pm1)$ 有 2 个实数根，令 $g(x)=\frac{\ln|x|}{|x|-1}$ $(x\neq\pm1)$，可知 $g(x)$ 为偶函数，当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$g(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ $(x\neq1)$，$g'(x)=\frac{x(1-\ln x)-1}{x(x-1)^2}$ $(x\neq1)$，令 $h(x)=x(1-\ln x)-1$，则 $h'(x)=-\ln x$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 时单调递增，在 $x\in(1,+\infty)$ 时单调递减，$h(x)<h(1)=0$，故 $g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，$x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$，$x\to1$ 时，$g(x)\to1$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，要满足 $a=\frac{\ln|x|}{|x|-1}$ $(x\neq\pm1)$ 有 2 个实数根，则 a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$. 故选 B.

二、选择题

9. AB 【解析】$y=g(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，$y=f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4},0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，故

$y=g(x)$与$y=f(x)$有相同的对称中心，A正确；$y=g(x)$的周期为$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$且$k\neq0)$，$y=f(x)$的周期为$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}$且$k\neq0)$，故$y=g(x)$与$y=f(x)$有相同的周期，B正确；画出$y=f(x)$与$y=g(x)$的图象可得两函数在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$有1个交点，C错误；



$y=f(x)\cdot g(x)=\tan 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin 2x}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sin 2x}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{-2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$且$x\neq\frac{\pi}{4}$，令$t=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，即$y=\frac{1}{2t}-t$，$y=\frac{1}{2t}-t$在$\left[\frac{1}{2},1\right)$内单调递减，故$y\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，D错误.

故选AB.

10. ACD 【解析】$f'(x)=x(\ln|x|+x^2-1)$，可知$f'(x)$为奇函数，令$h(x)=\ln|x|+x^2-1$，当$x>0$时，$h(x)=\ln x+x^2-1$，$h'(x)=\frac{1}{x}+2x>0$，此时$h(x)$单调递增，$h(1)=0$，故在区间$(0,1)$上，$f'(x)<0$，在$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，同理可得$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,0)$上单调递增，故A正确，C正确，B错误，D正确. 故选ACD.

11. CD 【解析】由题意可知$F(1,0)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线l过F点，联立$\begin{cases}ax+y-a=0\\y^2=4x\end{cases}$，可得$ay^2+4y-4a=0$，$y_1y_2=-4$，若$|AF|=2|DF|$，$y_1=-2y_2$，解得$y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$，则$A(2,2\sqrt{2})$，$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，所以直线$l$的斜率为$2\sqrt{2}$，故A错误；B选项：由于$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|DF|}=1$，所以$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|DF|}=1\geqslant2\sqrt{\frac{1}{|AF|}\times\frac{1}{|DF|}}\Rightarrow|AF|\cdot|DF|\geqslant4$，当且仅当$|AF|=|DF|=2$时等号成立，此时$l$的斜率不存在，故B错误；C选项：$|AD|-(|AF|+|DF|)+1=1$，故C正确；D选项：$|AB|$，

数列

$|BC|$，$|CD|$成等差D正，$|AB|+|CD|=4$，$|AD|=6>4$，所以存在，故　　确. 故选CD.

三、填空题

12. 2^{n-1} 【解析】$S_n=2a_n-1$，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，$S_n-S_{n-1}=2a_n-1-2a_{n-1}+1=a_n(n\geqslant2)$，即$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$，故$a_n=2^{n-1}$，$(n\geqslant2)$，$a_1=2a_1-1$，$a_1=1$，符合该式，故$a_n=2^{n-1}$. 故答案为$2^{n-1}$.

13. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由题意可得交线为以BB_1的中点E为圆心，半径为2的圆的一部分，计算可得球与棱B_1C_1的交点F到B_1的距离为$\sqrt{3}$，所以交线所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，所以交线的长度$l=\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$. 故答

案为$\frac{2\pi}{3}$.

14.$\frac{11}{27}$　【解析】两轮发球后,甲,乙可能的得分有 0,2,3,4,5,6,

甲得分比乙得分高的情况有如下可能,

甲得分	乙得分	概率
2,3,4,5,6	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$
3,4,5,6	2	$C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$
4,5,6	3	$C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$
5,6	4	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left[C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$
6	5	$C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$
		总和$=\frac{11}{27}$

故答案为$\frac{11}{27}$.

四、解答题

15.**解**:(1)因为$a(2-\cos C)=c(2\cos B+\cos A)$,由正弦定理可得$\sin A(2-\cos C)=\sin C(2\cos B+\cos A)$,　(1分)

由$A+B+C=\pi$,

则$\sin A=\sin(B+C)$,$\sin B=\sin(A+C)$,

则$2\sin A=2\sin C\cos B+\sin C\cos A+\sin A\cos C=2\sin C\cos B+\sin B$,

整理得$2\sin B\cos C=\sin B$,　(3分)

且$B\in(0,\pi)$,$\sin B\neq 0$,　(4分)

故$\cos C=\frac{1}{2}$,　(5分)

又$\because C\in(0,\pi)$,故$C=\frac{\pi}{3}$.　(6分)

(2)在$\triangle BDC$中,由余弦定理可得$BD^2=a^2+\frac{3}{4}-\sqrt{3}a\cos\frac{\pi}{3}=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$,　(7分)

又$\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}\Rightarrow a=\frac{2\sqrt{3}\sin A}{\sqrt{3}\cos A+\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\tan A}}$,　(9分)

因为$\triangle ABC$为锐角三角形,所以$\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

解得$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.　(10分)

所以$a\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.　(12分)

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}<BD<\frac{\sqrt{39}}{2}$.

故BD的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{39}}{2}\right)$.　(13分)

16.**解**:(1)作$A_1H\perp CC_1$于点H,

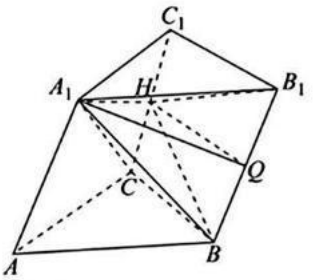
因为平面$A_1C_1CA\perp$平面BCC_1B_1,平面$A_1C_1CA\cap$平面$BCC_1B_1=CC_1$,$A_1H\subset$平面A_1C_1CA,

所以$A_1H\perp$平面BCC_1B_1,

又因为$BC\subset$平面BCC_1B_1,

所以$A_1H\perp BC$,$A_1H\perp BB_1$.　(2分)

连接HB_1,HB,取BB_1中点Q,



因为 $A_1B_1=A_1B$，

所以 $A_1Q\perp BB_1$，$A_1Q\cap A_1H=A_1$，A_1Q，$A_1H\subset$ 平面 A_1QH，

所以 $BB_1\perp$ 平面 A_1QH，$HQ\subset$ 平面 A_1QH，所以 $HQ\perp BB_1$. （4 分）

又 $A_1C_1=A_1C$，$A_1H\perp CC_1$，所以 H 为 CC_1 的中点，

所以平面 BCC_1B_1 为矩形，所以 $BC\perp CC_1$， （6 分）

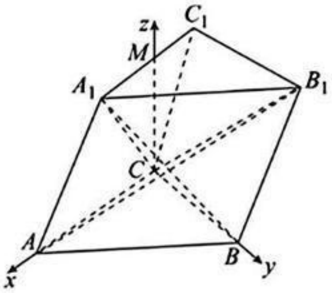
又 $A_1H\cap CC_1=H$， （7 分）

A_1H，$CC_1\subset$ 平面 A_1C_1CA，

所以 $BC\perp$ 平面 A_1C_1CA，AC 在平面 A_1C_1CA 内，所以 $BC\perp AC$. （8 分）

(2) 由 (1) 可得 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\angle A_1BH$，

故 $\sin\angle A_1BH=\dfrac{A_1H}{A_1B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，则 $A_1H=2\sqrt{2}$，则 $A_1C_1=3$. 以 CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，过 C 作 CM 垂直于 A_1C_1 于点 M，以 CM 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



$A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，$A_1\left(\dfrac{7}{3},0,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，$C_1\left(-\dfrac{2}{3},0,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，$B_1\left(-\dfrac{2}{3},4,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$， （9 分）

$\overrightarrow{A_1B}=\left(-\dfrac{7}{3},4,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,0,0)$，$\overrightarrow{B_1A}=\left(\dfrac{11}{3},-4,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{7}{3}x_1+4y_1-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}z_1=0\\ -4y_1=0\end{cases}$，

则 $\boldsymbol{m}=(4\sqrt{2},0,-7)$， （11 分）

设平面 B_1AC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1A}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{11}{3}x_2-4y_2-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}z_2=0\\ -3x_2=0\end{cases}$，

则 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{2},3)$， （13 分）

设平面 A_1BC 与平面 B_1AC 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{3\times(-7)}{\sqrt{2+9}\times\sqrt{32+49}}\right|=\dfrac{21}{9\times\sqrt{11}}=\dfrac{7\sqrt{11}}{33}$.

故平面 A_1BC 与平面 B_1AC 夹角的余弦值为 $\dfrac{7\sqrt{11}}{33}$. （15 分）

17. **解**：(1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=(x+2)(x+1)-2\ln x$，$x>0$，

$f'(x)=2x+3-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2+3x-2}{x}$

$=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{x}$， （2 分）

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$. （4 分）

故 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. （5分）

(2) $g(x)=x^2-(a+2)x+1-a+a\ln x$,

$g'(x)=\frac{(x-1)(2x-a)}{x}(x>0)$, （6分）

因为 $a>0$，令 $g'(x)=0$，则 $x=1$ 或 $\frac{a}{2}$. （7分）

当 $0<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，$\left(\frac{a}{2},1\right)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，（8分）

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，$x\to0$，$g(x)\to-\infty$，

（9分）

又 $g(1)=-2a<0$，由于 $g(x)$ 只有1个零点，

所以 $g\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}-2a+a\ln\frac{a}{2}+1<0$. （11分）

$g'\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a}{2}-1+\ln\frac{a}{2}<0$,

又 $a\to0$ 时，$g\left(\frac{a}{2}\right)\to1$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}-\ln2<0$，故

存在 $a_0\in(0,1)$，使得 $g\left(\frac{a_0}{2}\right)=0$, （13分）

所以 $2>a>a_0$. （14分）

因为 $a\in\mathbf{N}^*$，所以 $a_{\min}=1$. （15分）

18. **解**：(1) 因为 $|PM|=|F_1F_2|$，且 P 与 M 关于原点对称，所以 PM 与 F_1F_2 互相平分，所以 PF_2MF_1 为矩形，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|^2=|F_1P|^2+|F_2P|^2-2|F_1P||F_2P|\cos\frac{\pi}{2}$，$4c^2=4a^2+2|F_1P||F_2P|$，即 $|F_1P|\cdot|F_2P|=2b^2$,

所以 $S_{\triangle PMF_2}=S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\frac{\pi}{2}=b^2=1$,

$\therefore b^2=1$, （2分）

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $b^2=\frac{1}{3}a^2$. 所以 $a^2=3$, （4分）

故 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. （5分）

(2) 设 $Q(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $x_1^2-3y_1^2=3$，$x_2^2-3y_2^2=3$,

AQ: $y=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})\Rightarrow E\left(0,\frac{\sqrt{3}y_1}{x_1+\sqrt{3}}\right)$,

同理 $D\left(0,\frac{\sqrt{3}y_2}{x_2+\sqrt{3}}\right)$，$S\left(0,\frac{-\sqrt{3}y_1}{x_1-\sqrt{3}}\right)$，$T\left(0,\frac{-\sqrt{3}y_2}{x_2-\sqrt{3}}\right)$.

（7分）

所以 $\frac{|OT|}{|OS|}=\left|\frac{\sqrt{3}y_2}{x_2-\sqrt{3}}\times\frac{x_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}y_1}\right|$,

$\frac{|OE|}{|OD|}=\left|\frac{\sqrt{3}y_1}{x_1+\sqrt{3}}\times\frac{x_2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}y_2}\right|$, （9分）

$$\frac{\frac{|OT|}{|OS|}}{\frac{|OE|}{|OD|}}=\left|\frac{\sqrt{3}y_2}{x_2-\sqrt{3}}\times\frac{x_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}y_1}\times\frac{x_1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}y_1}\times\frac{\sqrt{3}y_2}{x_2+\sqrt{3}}\right|$$

$=\left|\frac{y_2^2(x_1^2-3)}{y_1^2(x_2^2-3)}\right|=1$. 故得证. （11分）

(3) 由(2)可得 $|OD|\cdot|OE|=\left|\frac{3y_1y_2}{(x_1+\sqrt{3})(x_2+\sqrt{3})}\right|=\frac{1}{2}$,

设 PQ: $x=ty+m(m>0)$ 与 C 联立得到 $(t^2-3)y^2+2mty+m^2-3=0$, （12分）

则 $\begin{cases}\Delta=4t^2m^2-4(t^2-3)(m^2-3)>0\\ y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2-3}\\ y_1y_2=\frac{m^2-3}{t^2-3}\end{cases}$ （13分）

$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{6m}{t^2-3}>0\\ x_1x_2=-\frac{3t^2+3m^2}{t^2-3}>0\end{cases}$ （14分）

代入$|OD|\cdot|OE|=\frac{1}{2}$得到：

$\left|\frac{m^2-3}{m^2+2\sqrt{3}m+3}\right|=\frac{1}{2}$，解得 $m=3\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$，（16 分）

所以直线 PQ 过定点$(3\sqrt{3},0)$或$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$．（17 分）

19．**解**：(1)要使得在时刻 $t=2$ 时粒子仍在顶点 A 处，有两种情况．

第一种情况：在 $t=1$ 时粒子停留在顶点 A 处，然后在 $t=2$ 时粒子仍然停留在顶点 A 处．第二种情况：在 $t=1$ 时粒子从顶点 A 移动到另外三个顶点中的一个，然后在 $t=2$ 时粒子又回到顶点 A 处．

$A_2=A_1A_2+\overline{A}_1A_2$．（1 分）

$p_1(A)=\frac{1}{3}$，（2 分）

$p_2(A)=p(A_1A_2)+p(\overline{A}_1A_2)=p(A_1)p(A_2|A_1)+p(\overline{A}_1)p(A_2|\overline{A}_1)$

$\Rightarrow p_2(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$．（5 分）

(2)$A_n=A_{n-1}A_n+\overline{A}_{n-1}A_n\Rightarrow p_n(A)=p(A_{n-1}A_n)+p(\overline{A}_{n-1}A_n)(n\geqslant2)$，（6 分）

$p_n(A)=p(A_{n-1})p(A_n|A_{n-1})+p(\overline{A}_{n-1})\cdot p(A_n|\overline{A}_{n-1})$，（7 分）

即 $p_n(A)=\frac{1}{3}p_{n-1}(A)+\frac{2}{9}[1-p_{n-1}(A)]$，

$p_n(A)=\frac{1}{9}p_{n-1}(A)+\frac{2}{9}$，$p_n(A)-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left[p_{n-1}(A)-\frac{1}{4}\right]$，（9 分）

所以 $p_n(A)=\frac{1}{108}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}+\frac{1}{4}$．（10 分）

所以数列$\{p_n(A)\}$单调递减．（11 分）

(3)由(2)可知 $p_n(A)$单调递减，

则 $b_n=p_n(A)\cdot p_{n+1}(A)\leqslant p_n(A)\cdot p_1(A)$．（13 分）

$b_n\leqslant\left[\frac{1}{108}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}+\frac{1}{4}\right]\times\frac{1}{3}\Rightarrow$（14 分）

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{324}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{i-2}+\frac{1}{12}\right]\leqslant\frac{1}{32}+\frac{n}{12}$，得证．（17 分）