

2024-2025 学年第二学期六校联合体 2 月学情调研测试

高三数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- 复数 z 满足 $\frac{1+i}{z}=i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的共轭复数 $\bar{z} =$
 A. $1-i$ B. $-1-i$ C. $1+i$ D. $-1+i$
- 已知向量 $\vec{a}=(1, 0)$, $\vec{b}=(x, 1)$, 若 $\vec{b} \cdot (\vec{b}-2\vec{a})=0$, 则 $x =$
 A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 有 4 辆车停放 5 个并停车位, 货车甲车体较宽, 停放时需要占两个车位, 并且乙车与货车甲相邻停放, 则共有多少种停放方法?
 A. 8 B. 12 C. 16 D. 10
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{12}=63+S_3$, $a_3+a_{12}=12$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos x$ 在区间 $[0, t]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 则 t 的最大值为
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{4\pi}{3}$
- 已知点 P 为直线 $l: x+y-2=0$ 上的一点, 过点 P 作圆 $C: (x+1)^2+(y+1)^2=1$ 的切线 PA , 切点为 A , 则 $\cos \angle PCA$ 的最大值为
 A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$
- 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1)=0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{4^{x+1}-17 \cdot 2^x+4} \geq 0$ 的解集为
 A. $(-2, -1] \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup [1, 2)$
 C. $(-2, -1] \cup \{0\} \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, -1] \cup [0, 1] \cup (2, +\infty)$
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$, O 为坐标原点, 直线 l 与双曲线交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 若点 O 到直线 l 的距离不小于 b , 则离心率的取值范围是
 A. $(1, \sqrt{3}]$ B. $(\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ D. $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}]$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分.

- 一个袋中有大小、形状完全相同的 3 个球, 颜色分别为红、黄、蓝, 从袋中无放回地取出 2 个球, 记“第一次取到红球”为事件 A , “第二次取到黄球”为事件 B , 则
 A. $P(B)=\frac{1}{3}$ B. $P(\bar{B}|A)=\frac{1}{3}$ C. $P(A|B)=\frac{1}{2}$ D. A, B 相互独立

10. 在棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别是棱 BC, CC_1 的中点, 下列选项中正确的是

A. 直线 EF 与 A_1B 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

B. 平面 AEF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面面积为 $\frac{27}{2}$

C. 若点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \cos^2\theta\overrightarrow{BC} + \sin^2\theta\overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\theta \in \mathbf{R}$, 则三棱锥 $D-A_1C_1P$ 的体积为定值

D. 以 B_1 为球心, 4 为半径作一个球, 则该球面与三棱锥 B_1-ABC 表面相交的交线长为 3π

11. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)-x$, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x)=\sqrt{x}-x+1$, 则

A. 当 $2 < x \leq 3$ 时, $f(x)=\sqrt{x-2}-3x+6$

B. 对任意正实数 k , $f(x)$ 在区间 $(k, k+1)$ 内恰有一个极大值点

C. 当 n 为正整数时, $f(n)=\frac{2+n-n^2}{2}$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, k]$ 内有 4 个极大值点, 则 k 的取值范围是 $[\frac{193}{64}, \frac{401}{100})$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 在二项式 $(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中, 只有第五项的二项式系数最大, 则展开式中 x 的系数为

▲_____. (用数字作答)

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{2024}=1$, $a_{2025}=2$, 能使不等式 $(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_m-\frac{1}{a_m})>0$ 成立最

小正整数 $m=$ ▲_____.

14. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且 $|AF|=3|FB|$. 直线 l_1, l_2 分别过点 A, B , 且与 y 轴平行, 在直线 l_1, l_2 上分别取点 M, N (M, N 均在点 A, B 的上方), 若 $\angle ABN$ 和 $\angle BAM$ 的角平分线相交于 P 点, 则 $\triangle PAB$ 的周长为 ▲_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $BC=3\sqrt{2}$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

(1) 若 $AC=2\sqrt{3}$, 求 $\sin C$;

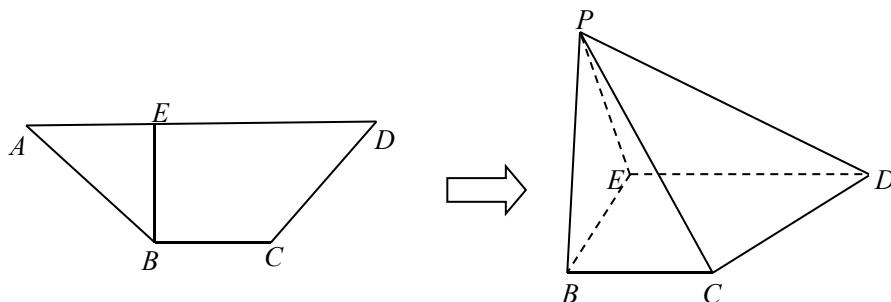
(2) 若 D 为边 BC 上的点且 AD 平分 $\angle BAC$, $AD=\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (满分 15 分)

梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 为 AD 上的一点且有 $BE \perp AD$, $AE = BE = 1$, $BC = \frac{1}{2}ED$, 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折到 $\triangle PEB$ 使得二面角 $P-BE-C$ 的平面角为 θ , 连接 PC , PD , F 为棱 PD 的中点.

(1) 求证: $FC \parallel$ 面 PBE ;

(2) 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $PD = \sqrt{7}$ 时, 求直线 PC 与平面 BCF 所成角的正弦值.



17. (满分 15 分)

某运动会有两种不同价格的开幕式门票, 某人花 a 元预定该运动会开幕式门票一张, 另外还花若干元预定乒乓球、羽毛球比赛门票各一张. 根据相关规定, 从所有预定者中随机抽取相应数量的人, 这些人称为预定成功者, 他们可以直接购买门票. 另外, 对于开幕式门票, 有自动降级规定, 即当这个人预定的 a 元门票未成功时, 系统自动使他进入 b 元开幕式门票的预定. 假设获得 a 元开幕式门票的概率是 0.2, 若未成功, 仍有 0.3 的概率获得 b 元开幕式门票的机会, 获得乒乓球、羽毛球门票概率均是 0.5, 且获得每张门票之间互不影响.

(1) 求这个人可以获得该运动会开幕式门票的概率;

(2) 假设这个人获得门票总张数是 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

18. (满分 17 分)

已知 $f(x) = 3x - 2\sin x - k \cdot \ln x$.

- (1) 当 $k=0$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程;
- (2) 当 $k=1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数;
- (3) 若存在 $t_1, t_2 \in \mathbf{R} (t_1 < t_2)$, $f(e^{t_1}) = f(e^{t_2})$, 证明: $t_1 + t_2 < 2\ln k$.

19. (满分 17 分)

已知 P 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上一动点, 过点 P 分别作 x 轴, y 轴的垂线, 垂足分别为 M, N , 连接 NM 并延长至点 Q , 使得 $|MQ| = 2$, 点 Q 的轨迹记为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 设曲线 C 的左顶点为 T , 当直线 l 与曲线 C 交于不同的 A, B 两点, 连结 AT, BT , $k_{AT} + k_{BT} = -\frac{1}{2}$, 证明: 直线 l 过定点;
- (3) 若过右焦点 F_2 的直线 l 与曲线 C 交于不同的 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{F_2B} = \lambda \overrightarrow{AF_2}$, 当 $\lambda \in [2, 3]$ 时, 求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围.