机密★启用前

湖北省部分市州2025年元月高三期末联考

数学试卷

本试卷共4页,19题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知命题 p:$\log_5 x>\log_5 y$,命题 q:$5^x>5^y$,则命题 p 是命题 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

3. 若复数 $z=\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+3i$ 是纯虚数,则 θ 的值可以为

A. 2π　　B. $\frac{5\pi}{4}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{9\pi}{4}$

4. 若随机变量 ξ 的分布列如下表,表中数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,则 $P(\xi=5)$ 的取值是

ξ	3	4	5	6	7
P	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

5. 函数 $f(x)=\frac{a}{x}\ln(2x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线与直线 $y=3x+5$ 垂直,则 $a=$

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $-\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{12}$

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，O 为坐标原点，M 是抛物线上任意一点，F 为焦点，且 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MF}$，则直线 ON 的斜率的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. -1　　D. 2

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，平面 $ABCD$ 内一动点 Q 满足 $|QA|=2|QB|$，当三棱锥 $Q-DD_1A$ 的体积取最大值时，该三棱锥外接球的表面积为

A. 24π　　B. 27π　　C. 54π　　D. 56π

8. 已知 $a\neq0$，$(ax^2+bx+c)\cos(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3})\leqslant0$ 对 $x\in[0,8]$ 恒成立，则 $2b+c-\frac{1}{a}$ 的最小值为

A. 4　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法中正确的是

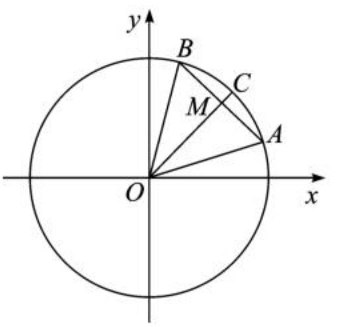
A. 回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 恒过样本中心点 $(\bar{x},\bar{y})$，且至少过一个样本点

B. 用决定系数 R^2 刻画回归效果时，R^2 越接近 1，说明模型的拟合效果越好

C. 将一组数据中的每一个数据都加上同一个正数后，标准差变大

D. 基于小概率值 α 的检验规则是：当 $\chi^2\geqslant x_\alpha$ 时，我们就推断 H_0 不成立，即认为 X 和 Y 不独立，该推断犯错误的概率不超过 α

10. 如图所示，已知角 $\alpha,\beta(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2})$ 的始边为 x 轴的非负半轴，终边与单位圆的交点分别为 A,B，M 为线段 AB 的中点，射线 OM 与单位圆交于点 C，则下列说法正确的是



A. $\angle BOC=\frac{\beta-\alpha}{2}$

B. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+1=|\overrightarrow{OM}|^2$

C. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OM}|$

D. 点 M 的坐标为 $(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta)$

11. 直线族是指具有某种共同性质的直线的全体，例如 $y=kx+1(k\in\mathbf{R})$ 表示过点 $(0,1)$ 的直线族（不包括直线 $x=0$）. 直线族的包络曲线定义为：直线族中的每一条直线都是该曲线上某点处的切线，且该曲线上的每一点处的切线都是该直线族中的某条直线. 已知直线族 $ax+by=1(a,b\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是

A. 若 $a=\cos\theta,b=\sin\theta(\theta\in[0,2\pi))$，则该直线族的包络曲线为圆

B. 若 $a=\frac{\cos\theta}{m},b=\frac{\sin\theta}{n}(m>n>0,\theta\in[0,2\pi))$，则该直线族的包络曲线为椭圆

C. 当 $a=\frac{3}{2t},b=-\frac{1}{2t^3}(t>0)$ 时，点 $(x_0,2x_0^3)(x_0>0)$ 可能在直线族 $ax+by=1$ 上

D. 当 $a^2+b=0$ 时，曲线 $x^2=4y(x\neq0)$ 是直线族 $ax+by=1$ 的包络曲线

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1+a_4=4$,$a_2+a_5=8$,则 $S_6=$__________.

13. 若 A,B 为曲线 $x^2+y^2=2|x|+2|y|$ 上任意两点,则 A,B 两点间距离的最大值为________.

14. 已知 $x\in(0,\mathrm{e})$,若不等式$\dfrac{m}{x^2(1-\ln x)}-2\mathrm{e}^{n-1}\geqslant 0$ 恒成立,则$\dfrac{n}{m}$的最大值为__________.

四、解答题:共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $a\sqrt{1+\sin 2C}=b$,$C\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$.

(1)求 A;

(2)若 $b=2$,$c\sin 2B=\sqrt{3}b\sin C$,求$\triangle ABC$ 的周长.

16. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$.

(1)$a=1$ 时,求 $f(x)$的极值;

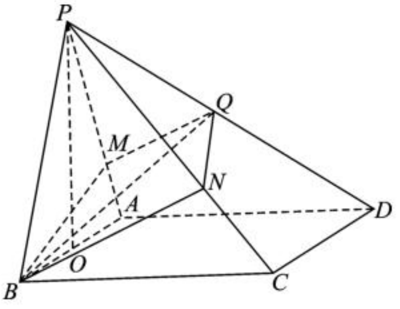
(2)若不等式 $a(x^2-x+1)\geqslant f(x)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

17. (本小题满分 15 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,$ABCD$ 是边长为 2 的正方形,$\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰直角三角形,O 为 AB 的中点,Q 为 PD 的中点,$PD=\sqrt{6}$.

(1)证明:$PO\perp BC$;

(2)过 B,Q 两点的平面与直线 AP,CP 分别交于点 M,N,且平面$BNQM/\!/AC$,求平面$BNQM$与平面 PCD 夹角的余弦值.



18.(本小题满分 17 分)

已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,点 P 是椭圆上任意一点,$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的最小值是 -2.

(1)求椭圆 M 的方程;

(2)设 A,B 为椭圆的上、下顶点,C,D 为椭圆上异于 A,B 的两点,记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2,且$\frac{k_2}{k_1}=3$.

(i)证明:直线 CD 过定点 S;

(ii)设直线 AC 与直线 BD 交于点 Q,直线 QS 的斜率为 k_3,试探究$\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2},\frac{1}{k_3}$满足的关系式.

19.(本小题满分 17 分)

某商家推出一个活动:将 n 件价值各不相同的产品依次展示在参与者面前,参与者可以选择当前展示的这件产品,也可以不选择这件产品,若选择这件产品,该活动立刻结束;若不选择这件产品,则看下一件产品,以此类推. 整个过程参与者只能继续前进,不能返回,直至结束. 同学甲认为最好的一定留在最后,决定始终选择最后一件,设他取到最大价值产品的概率为 P_1;同学乙采用了如下策略:不取前 $k(1\leqslant k<n)$ 件产品,自第 $k+1$ 件开始,只要发现比他前面见过的每一个产品的价值都大,就选择这件产品,否则就取最后一件,设他取到最大价值产品的概率为 P_2.

(1)若 $n=4,k=2$,求 P_1 和 P_2;

(2)若价值最大的产品是第 $k+m$ 件$(1\leqslant m\leqslant n-k)$,求 P_2;

(3)当 n 趋向于无穷大时,从理论的角度(即 $k\in\mathbf{R}$),求 P_2 的最大值及 P_2 取最大值时 k 的值.(取$\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}=\ln\frac{n}{k}$)

湖北省部分市州 2025 年元月高三期末联考

数学参考答案及解析

一、单项选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1.A 2.C 3.C 4.D 5.B 6.B 7.C 8.B

7.【答案】C

（法一）平面 $ABCD$ 内，以 AD,AB 为 x,y 轴建系，则 $A(0,0)$ ，$B(0,3)$, 设 $Q(x，y)$，

则由 $|QA|=2|QB|$，化简可得 $x^2+(y-4)^2=2^2$.

Q 在平面上以 $(0,4)$ 为圆心，2 为半径的圆上，当 Q 到平面 DD_1A 的距离最大时，三棱锥 $Q-DD_1A$ 的体积最大，此时 Q（0,6），设此时锥体的外接球半径为 R，可补体为长方体，

则有 $R=\dfrac{\sqrt{3^2+3^2+6^2}}{2}$，$\therefore S=4\pi R^2=54\pi$

（法二）平面 $ABCD$ 内，$|QA|=2|QB|$，延长 AB 至 M，使得 $BM=1$，延长 AB 至 Q_1, 使得 $BQ_1=3$，由阿氏圆的性质可知，Q 在以 M 为圆心，2 为半径的圆上，则 Q 在 Q_1 时，三棱椎 $Q-DD_1A$ 的体积最大, 设此时锥体的外接球半径为 R，则有

$R^2=\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3^2$（或同法一，补体为长方体）$\therefore S=4\pi R^2=54\pi$

8.【答案】B

分析得 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=\cos(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3})$ 有相同的零点 1 和 7，易知 $a<0$，$c<0$ 且

1 和 7 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，所以 $\begin{cases}8=-\dfrac{b}{a}\\7=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，

所以 $b=-8a$，$c=7a$，所以 $2b+c-a=-9a+\dfrac{1}{-a}\geq 6$，$a=-\dfrac{1}{3}$ 取等，选 B

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.

9.BD 10.ACD 11.ABD

11.【答案】ABD

$x^2+y^2=1$ 在（$\cos\theta,\sin\theta$）处的切线方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$，所以 A 正确；

椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 在（$m\cos\theta,n\sin\theta$）处的切线方程为 $\dfrac{x\cos\theta}{m}+\dfrac{y\sin\theta}{n}=1$，B 正确；

将$(x_0,2{x_0}^3)$代入$y=3t^2x-2t^3$得$2t^3-3t^2x_0+2{x_0}^3=0$，构造

$f(t)=2t^3-3t^2x_0+2{x_0}^3$，$f'(t)=6t(t-x_0)$，易知$f(t)$在$(0,+\infty)$无零点，C 错误；

若$(x_0，y_0)$不在直线族上，代入直线$y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a^2}$得$y_0a^2-ax_0+1=0$，

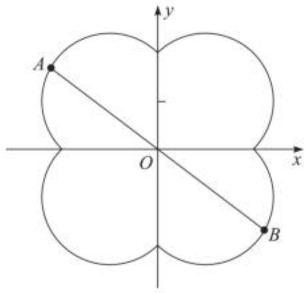
$\Delta={x_0}^2-4y_0<0$，所以$y_0>\dfrac{{x_0}^2}{4}$，联立$y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a^2}$和$x^2=4y$得$x^2-\dfrac{4}{a}x+\dfrac{4}{a^2}=0$，

所以$\Delta=0$，所以直线$y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a^2}$和$x^2=4y$相切，又$ax+by=1$不包括直线$y=0$，所以）$x^2=4y$（$x\neq 0$）是直线族$ax+by=1$的包络曲线，D 正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.28　　　　13. $4\sqrt{2}$　　　　14. $\dfrac{1}{e}$

13.【答案】$4\sqrt{2}$



当$x\geq 0$, $y\geq 0$时，曲线为$x^2+y^2=2x+2y$在第一象限的部分，

即$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，且图像关于 x 轴、y 轴，坐标原点均对称.

则 A,B 距离的最大值为直径的 2 倍，为$4\sqrt{2}$.

14.【答案】$\dfrac{1}{e}$

方法一：

$x\in(0,e)$，不等式$\dfrac{m}{x^2(1-\ln x)}\geq 2e^{n-1}$恒成立

令$h(x)=x^2(1-\ln x)$，则$h'(x)=2x(1-\ln x)+x^2(-\dfrac{1}{x})=x(1-2\ln x)$

则$h(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，$h(x)\leq h(\sqrt{e})=\dfrac{e}{2}$.

且$h(x)>0$，$\dfrac{m}{x^2(1-\ln x)}\geq 2e^{n-1}$，$\dfrac{m}{2e^{n-1}}\geq x^2(1-\ln x)\geq\dfrac{e}{2}$

$\therefore m\geq e^n, \dfrac{n}{m}\leq\dfrac{n}{e^n}$，令$g(n)=\dfrac{n}{e^n}$，则$g(n)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

$g(n)=\dfrac{n}{e^n}\leq g(1)=\dfrac{1}{e}\therefore\dfrac{n}{m}\leq\dfrac{n}{e^n}\leq\dfrac{1}{e}$

方法二：$x\in(0,e)$，不等式$\dfrac{m}{x^2(1-\ln x)}-2e^{n-1}\geq 0$恒成立

即$\dfrac{m\left(\dfrac{e}{x}\right)^2}{2\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)}=\dfrac{m\left(\dfrac{e}{x}\right)^2}{\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)^2}\ge e^{n+1}$ 令$t=\left(\dfrac{e}{x}\right)^2\in(1,+\infty),\ln t>0\ \therefore\dfrac{mt}{\ln t}\ge e^{n+1}$

$\therefore m\ge\dfrac{e^{n+1}\ln t}{t}$ 在$t\in(1,+\infty)$上恒成立.

令$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$\varphi(t)$在$(0,\ e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}\ge\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$

$\therefore m\ge\dfrac{e^{n+1}}{e}=e^n$，当$n\le0$时，$\dfrac{n}{m}\le0$；当$n>0$时，$\dfrac{n}{m}\le\dfrac{n}{e^n}$；

令$g(n)=\dfrac{n}{e^n}$，则$g(n)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

$g(n)=\dfrac{n}{e^n}\le g(1)=\dfrac{1}{e}\ \therefore\dfrac{n}{m}\le\dfrac{n}{e^n}\le\dfrac{1}{e}$

四、解答题：共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.解析：

（1）由正弦定理得 $\sin A\sqrt{\sin^2C+\cos^2C+2\sin C\cos C}=\sin B$ ……………2 分

$\because C\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$，$C+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},\ \pi),\sqrt{2}\sin(C+\dfrac{\pi}{4})>0,\sin C+\cos C>0$

$\therefore\sin A(\sin C+\cos C)=\sin B$ ……………4 分

又$B=\pi-(A+C)$

$\therefore\sin A\sin C+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$\therefore\sin A\sin C=\cos A\sin C$，又$\sin C\ne0$，所以$\tan A=1$，$A\in(0,\ \pi)$

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$. ……………6 分

（2）由正弦定理及二倍角公式得$2\sin C\sin B\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin C$，

$\therefore\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 又$B\in(0,\dfrac{3\pi}{4})\ \therefore B=\dfrac{\pi}{6}$ ……………8 分

$\therefore\sin C=\sin(A+B)=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ……………10 分

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}=4$，$\therefore a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

周长$a+b+c=2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$. ……………13 分

16.解析：（1）$a=1$时，$f(x)=\ln x-x+1$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，（$x>0$）……1 分

令$f'(x)=0$，所以$x=1$，……………2 分

当$x\in(0,1)$，$f'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)<0$；

所以$x=1$时，$f(x)$有极大值$f(1)=0$，……………5 分

无极小值 ……………6 分

（2）方法一：由题意可知$a(x^2-x+1)\geq f(x)$，所以$ax+\frac{a}{x}\geq\frac{\ln x+1}{x}$ ……………7 分

由（1）知$\frac{\ln x+1}{x}\leq 1$，$x=1$取等号，

所以只需$a(x+\frac{1}{x})\geq 1$，　$x=1$取等号

$\therefore a\geq\frac{1}{2}$ ……………8 分

下面证明$a\geq\frac{1}{2}$时，不等式成立，

要证$a(x^2+1)\geq(\ln x+1)$，即需证明$(x^2+1)\geq 2(\ln x+1)$成立。……………10 分

令$G(x)=x^2+1-2(\ln x+1)$，$G'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ ……………12 分

当$x\in(0,1)$时，$G'(x)<0$，

当$x\in(1,+\infty)$时，$G'(x)>0$，所以$G(x)\geq G(1)=0$,所以不等式$(x^2+1)\geq 2(\ln x+1)$成立，所以$a\geq\frac{1}{2}$时，$a(x^2+1)\geq(\ln x+1)$成立 ……………15 分

方法二：由题意，$a(x^2+1)\geq\ln x+1$ ……………7 分

易知$x=1$时，$2a\geq 1$，所以$a\geq\frac{1}{2}$ ……………8 分

下面证明$a\geq\frac{1}{2}$时，不等式成立，

要证$a(x^2+1)\geq(\ln x+1)$，即需证明$(x^2+1)\geq 2(\ln x+1)$成立。……………10 分

令$G(x)=x^2+1-2(\ln x+1)$，$G'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ ……………12 分

当$x\in(0,1)$时，$G'(x)<0$，

当$x\in(1,+\infty)$时，$G'(x)>0$，所以$G(x)\geq G(1)=0$,所以不等式$(x^2+1)\geq 2(\ln x+1)$成立，所以$a\geq\frac{1}{2}$时，$a(x^2+1)\geq(\ln x+1)$成立 ……………15 分

方法三：依题意，$a\geq\frac{\ln x+1}{x^2+1}$恒成立 ……………7 分

令$g(x)=\frac{\ln x+1}{x^2+1}$，$x>0$

则$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-x-2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}, g'(1)=0$ ……………10 分

当$x>1$时，$\frac{1}{x}-x<0,-2x\ln x<0,\therefore g'(x)<0, g(x)$单调递减

当$0<x<1$时，$\frac{1}{x}-x>0,-2x\ln x>0,\therefore g'(x)>0, g(x)$单调递增 ……………13 分

$g_{\max}(x)=g(1)=\frac{1}{2}\ \therefore a\geq\frac{1}{2}$ ……………15 分

17.解析：

(1) $PA=PB, O$为AB中点,$\therefore PO\perp AB, PO=1$ ……………1 分

在ΔOAD中，$OD=\sqrt{AD^2+OA^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

又$\left(\sqrt{5}\right)^2+1^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$，即$OD^2+OP^2=PD^2$， ……………3 分

$\therefore PO\perp OD$

$AB\cap OD=O, PO\perp$平面$ABCD$，

$BC\subseteq$平面$ABCD$，$\therefore PO\perp BC$ ……………6 分

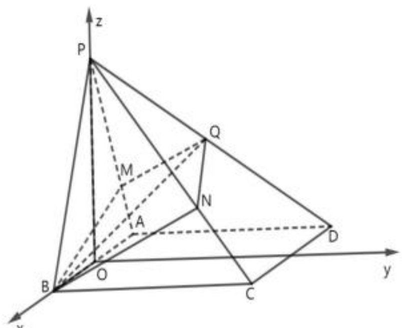
（2）取CD中点H，则$OH\perp AB$,由（1）可知，$PO\perp$平面$ABCD$

$\therefore PO\perp OB, PO\perp OH$ ……………7 分

以O为坐标原点，OB,OH,OP分别为x轴、y轴、z轴，建立空间直角坐标系，

$O(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(-1,2,0)$，$A(-1,0,0)$，

$P(0,0,1)$ $Q(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{PC}=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，



设平面PCD法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$$\begin{cases}-2x_1=0\\x_1+2y_1-z_1=0\end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}=(0,1,2)$ ……………9 分

平面$BNQM // AC$，$AC \subset$ 面PAC，面$PAC \cap$ 面$BNQM = MN$

$MN // AC$，$\overrightarrow{AC} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{BQ} = (-\frac{3}{2},1,\frac{1}{2})$

设平面$BNQM$法向量为$\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$，$\because \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \therefore \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = 0 \\ -3x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$，则$\overrightarrow{n_2} = (1,-1,5)$， ……………12 分

$\cos < n_1, n_2 >= \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

平面$BNQM$与平面PCD夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$ ……………15 分

18. 解析：

（1）$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF_1}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF_2}) = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF_1}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OF_1})$

$= \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OF_1}^2 = \overrightarrow{PO}^2 - c^2 \geq b^2 - c^2$ ……………3 分

$\therefore b^2 - c^2 = 1 - c^2 = -2$

$\therefore c^2 = 3$，$a^2 = b^2 + c^2 = 3 + 1 = 4$

椭圆M的方程为$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ……………5 分

（2）（i）若直线CD斜率不存在，则$k_1 k_2 < 0$，不符合题意； ……………6 分

当直线CD斜率存在时，设直线$CD: y = kx + m$，$m \neq \pm 1, C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$，

联立直线CD和椭圆方程，

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$

韦达定理可得：$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} \end{cases}$ 且 $\Delta > 0$

方法一：

令直线AD斜率为k_4，则$k_2 k_4 = \frac{y_2 + 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_1} = \frac{y_2^2 - 1}{x_1^{\ 2}} = \frac{y_2^2 - 1}{4(1 - y_2^2)} = -\frac{1}{4}$

又$k_2 = 3k_1, \therefore k_1 \cdot k_4 = -\frac{1}{12}$ ……………8 分

即 $\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=-\frac{1}{12},\therefore\frac{(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)}{x_1x_2}=-\frac{1}{12}$

$\therefore(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)=-\frac{1}{12}x_1x_2$

$\therefore\left(k^2+\frac{1}{12}\right)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=0$

$\therefore\left(k^2+\frac{1}{12}\right)(4m^2-4)-8k^2m(m-1)+(1+4k^2)(m-1)^2=0$，展开可得：

$2m^2-3m+1=0,(2m-1)(m-1)=0,\therefore m=\frac{1}{2}$ 或 $m=1$

若 $m=1$，直线 $CD:y=kx+m$ 恒过 $(0,1)$，不合题意，舍去；

若 $m=\frac{1}{2}$，直线 $CD:y=kx+m$ 恒过 $(0,\frac{1}{2})$

直线 CD 恒过定点 $S(0,\frac{1}{2})$. ……………11 分

方法二： $kx_1x_2=\frac{1-m^2}{2m}(x_1+x_2)$，$\frac{k_2}{k_1}=\frac{y_2+1}{x_2}\cdot\frac{x_1}{y_1-1}=3$

$\therefore\frac{(kx_2+m+1)x_1}{(kx_1+m-1)x_2}=3$ ……………8 分

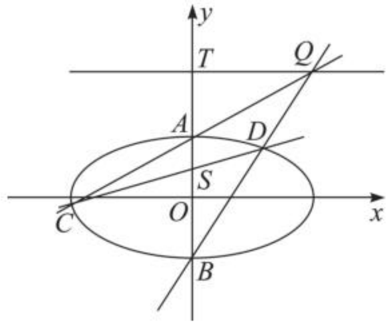
$$\frac{\frac{1-m^2}{2m}(x_1+x_2)+(m+1)x_1}{\frac{1-m^2}{2m}(x_1+x_2)+(m-1)x_2}=\frac{(1+m^2+2m)x_1+(1-m^2)x_2}{(1-m^2)x_1+(m^2-2m+1)x_2}=3$$

$\therefore\frac{1-m^2+2m}{1-m^2}=\frac{1-m^2}{m^2-2m+1}=3$，又 $m\neq\pm1$

所以 $m=\frac{1}{2}$，直线 CD 恒过定点 $S(0,\frac{1}{2})$. ……………11 分

（ii）由（i）可知，直线 $AC:y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，直线 $BD:y=\frac{y_2+1}{x_2}x-1$

$\frac{y-1}{y+1}=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{x_2}{y_2+1}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3},\therefore y=2$ ……………15 分



即 Q 点在直线 $y=2$ 上，令 $y=2$ 与 y 轴的交点为 $T(0,2)$

则 $|k_1|=\frac{|AT|}{|QT|}=\frac{1}{|QT|}$；$|k_2|=\frac{|BT|}{|QT|}=\frac{3}{|QT|}$；$|k_3|=\frac{|ST|}{|QT|}=\frac{3}{2|QT|}$，

显然 k_1,k_2,k_3 同号，则有

$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{2}{k_3}$. ……………17 分

19. 解析：

(1) $P_1=\dfrac{1}{4}$； ……………2 分

依题意，4 个产品的位置从第 1 个到第 4 个排序，有 $A_4^4=24$ 种情况，同学 B 要取到最贵价值产品，有以下两种情况：最贵价值产品是第 3 个，其它的随意在哪个位置，有 $A_3^3=6$ 种情况；最贵价值产品是第 4 个，第二贵价值产品是第 1 个或第 2 个，其它的随意在哪个位置，有 $2A_2^2=4$ 种情况，所以所求概率 $P_2=\dfrac{5}{12}$. ……………5 分

(2) (i)

法一：若考虑全部产品排序，价值最大的产品是第 $k+m$ 件，共有 $(n-1)!$ 种排法，先从 $n-1$ 件产品中挑 $(k+m-1)$ 件产品出来，其中价值最大的产品放在前 k 件，剩下的全排列，共 $C_{n-1}^{k+m-1}k(k+m-2)!$ 种排法，剩下的 $(n-k-m)$ 件产品全排列，即

$$P_2=\frac{C_{n-1}^{k+m-1}k(k+m-2)!(n-k-m)!}{(n-1)!}=\frac{\dfrac{(n-1)!}{(k+m-1)!(n-k-m)!}k(k+m-2)!(n-k-m)!}{(n-1)!}$$

$=\dfrac{k}{k+m-1}$ ……………10 分

法二：若价值最大的产品是第 $k+m$ 件，则乙同学能取到该产品，只需要前 $k+m-1$ 件产品中价值最大的产品排在前 k 件，即

$P_2=\dfrac{k}{k+m-1}$ ……………10 分

(ii) 记事件 A 表示最贵价值产品被乙同学取到，

事件 B_i 表示最贵价值产品排在第 i 个，则 $P(B_i)=\dfrac{1}{n}$，

由全概率公式知：$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)$，

当 $1\le i\le k$ 时，最贵价值产品在前 k 个中，不会被取到，此时 $P(A|B_i)=0$；

当 $k+1\le i\le n$ 时，最贵价值产品被取到，当且仅当前 $i-1$ 件产品中最贵的一个在前 k 个之中，此时 $P(A|B_i)=\dfrac{k}{i-1}$

因此 $P(A)=\dfrac{1}{n}(\dfrac{k}{k}+\dfrac{k}{k+1}+\cdots+\dfrac{k}{n-1})=\dfrac{k}{n}\ln\dfrac{n}{k}$ ……………13 分

令$g(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{n}{x}(x>0)$，求导得$g'(x)=\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}-\frac{1}{n}$，由$g'(x)=0$，得$x=\frac{n}{\mathrm{e}}$

当$x\in(0,\frac{n}{\mathrm{e}})$时，$g'(x)>0$，当$x\in(\frac{n}{\mathrm{e}},n)$时，$g'(x)<0$

即函数$g(x)$在$(0,\frac{n}{\mathrm{e}})$上单调递增，在$(\frac{n}{\mathrm{e}},n)$上单调递减 ……………15 分

则$g(x)_{\max}=g(\frac{n}{\mathrm{e}})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，于是当$k=\frac{n}{\mathrm{e}}$时，$P(A)=\frac{k}{n}\ln\frac{n}{k}$取得最大值$\frac{1}{\mathrm{e}}$

所以P_2的最大值为$\frac{1}{\mathrm{e}}$，此时k的值为$\frac{n}{e}$. ……………17 分